

平坦トーラスの折り紙埋め込み

著者	坪井 俊
著者（英）	Tsuboi Takashi
雑誌名	武蔵野大学数理工学センター紀要
号	5
ページ	44-57
発行年	2020-03-01
URL	http://id.nii.ac.jp/1419/00001268/

平坦トーラスの折り紙埋め込み

Origami embeddings of flat tori

坪井 俊¹

1 はじめに

この研究の動機を述べるためにホモトピー原理について少し説明する。

微分方程式の解の存在を考えるとときにトポロジーの手法が応用できる場合がある。微分方程式には常微分方程式の初期値問題のように現在の状態から今後の状態を記述するものと、いろいろな保存法則のように状態は方程式を満たすという形のものがある。後者の方程式の解の存在は難問であることが多いが、それに対して多様体の等長埋め込みに関するナッシュ-カイパーの定理や多様体の埋め込みはめ込みに関するスモール-ハーシュの定理に源流を持ち、グロモフにより定式化されたホモトピー原理による方法論が有効であることがある。

このホモトピー原理の研究のなかで標題の問題を考えるに至った。

ナッシュ-カイパーの定理にかかわるホモトピー原理の説明を少し続ける。例えば、平面の開領域 Ω の2点 (x_0, y_0) , (x_1, y_1) を長さ1の滑らかな曲線で結ぶことができるかという問題を考えると、これは曲線 $\{(x(t), y(t))\}_{t \in [0,1]}$ の1階微分を用いて次の境界値問題に書かれる。

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 1 \quad ((x(0), y(0)) = (x_0, y_0), (x(1), y(1)) = (x_1, y_1)).$$

この場合は、開領域が弧状連結であり、 (x_0, y_0) , (x_1, y_1) が Ω 内で長さ1以下の折れ線で結ぶことができることと、解の存在が同値であることが容易にわかる。

ナッシュ [10](とカイパー [7]) は、任意の閉曲面に任意のリーマン計量を与えたとき、これを1回連続微分可能 (C^1) に曲線の長さを保つように3次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^3 に埋め込むことができることを示した。特に、平坦トーラスを等長に C^1 埋め込みできる。平坦トーラスとは、ガウス曲率が0のトーラスということであるが、平坦トーラスはユークリッド平面 \mathbf{R}^2 の格子群 $\mathbf{Z}\vec{a} + \mathbf{Z}\vec{b}$ の平行移動作用による商空間 $\mathbf{R}^2/(\mathbf{Z}\vec{a} + \mathbf{Z}\vec{b})$ となる。平坦トーラスの相似類の分類は、楕円曲線の分類と等価であり、複素1次元のオービフォールド $S^2(2, 3, \infty)$ がモジュライ空間となることがわかっている。閉曲面の C^2 級の埋め込みには、必ず曲率正の点が存在するので、平坦トーラスを滑らかに等長に埋め込むことはできない。

$T^2 = \mathbf{R}^2/(\mathbf{Z}\vec{a} + \mathbf{Z}\vec{b}) \rightarrow \mathbf{R}^3$ の写像 $\begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$ に対し、この写像が曲線の長さを保つこ

¹ 武蔵野大学数理工学センター員 / 武蔵野大学工学部数理工学科特任教授

とは、 $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$ が値をとる $3 \times 2 = 6$ 次元の空間 $\mathbf{R}^{3 \times 2} = \mathbf{R}^6$ 上の 3 つの 2 次形式が定数という関係式である。すなわち、等長埋め込みとなる条件は引き戻したリーマン計量が平坦トーラスの計量となることであり、

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 &= 1 \\ \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} &= 0 \\ \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 &= 1 \end{aligned}$$

と書かれる。これは C^1 級の写像に対して意味を持つ。(曲率を計算するには 2 回微分が必要であるので、ナッシュ-カイパーの埋め込みは曲率が定義できないような点を必ず持つことになる。) この解空間の凸包への写像を近似解に変形しそれを収束させる凸積分法がナッシュ-カイパーの定理の証明の要点である。ナッシュ-カイパーの定理で存在が示されているが、実際の等長埋め込み写像は、[3], [4] で C^1 収束する具体的な関数列として明示的に構成されており、<http://hevea-project.fr/> には動画が公開されている。

上の定理を含む一般次元のナッシュ-カイパーの定理は、スメール・ハーシュの埋め込みの分類定理、フィリップスの開多様体のはめ込みの分類定理などとともに、グロモフにより「ホモトピー原理」にまとめられた。これについては、Eliashberg-Michachev([6]) がわかりやすい。

さて本稿では、平坦トーラスの折り紙としての埋め込みを考える。区分線型な埋め込みに対し、その上の区分的に滑らかな曲線の長さが定義されるのでこれは意味のある問題である。直感的には局所的に展開して平面上の直線になるような曲線が測地線である。この研究はナッシュ-カイパーの定理を説明する上で、区分的に滑らかな埋め込みの場合はより易しいかを考察したことに始まる。特に平坦な多様体の埋め込みは、局所的には容易に折り紙埋め込みできるので、大域的实现が具体的に記述できると思われたことが研究のきっかけである。

どのような区分線型曲面も埋め込めるかということについては、完全には解決されていないようである。区分線型であれば、頂点に曲率が集中している状態が実現される。3 次元ユークリッド空間のどのような多面体も折り紙で近似できるというような結果もあり、舘知宏氏のウェブページ [14] には、回転面として実現されるトーラスを近似する平坦トーラスが提示されている。もっと簡単な実現を探していたところ、ウェブ上に Henry Segerman 氏の Hinged Flat Torus の動画 [11] があり、[13] で売られているということがわかった。彼の本 [12] もある。これは Scientific American, Roots of Unity というブログで取り上げられていた [8]。また、ひとたちぎりの結果 [1] を用いれば、何重かに折りたたむことを許したはめ込みは存在することが [2] に示されている。

ここで述べる折り紙埋め込みは、Henry Segerman 氏の Hinged Flat Torus を変形したものであり、正多角形を用いており、正多角形に等長変換として作用する巡回群が埋め込みに等長

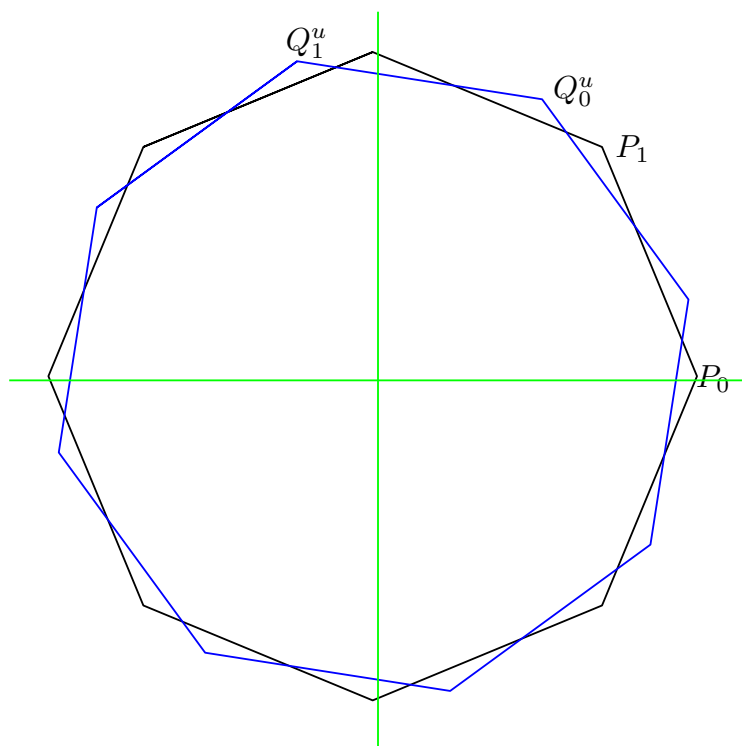


図1 正 n 角形 $P_0 \cdots P_{n-1}$ と $Q_0^u \cdots Q_{n-1}^u$ を z 軸正方向から見た図 ($n = 8$)。

変換として作用している。この作り方で、平坦トーラスのモジュライ空間である $S^2(2, 3, \infty)$ のなかの稠密開集合に対応する平坦トーラスは折り紙埋め込みとして実現できていることを示すことができる (定理 1)。このことはモジュラスの計算、すなわち平坦トーラスの基本領域が決定できること、正多角形の回転の方向と平坦トーラス埋め込みの高さが連続に変化できること、高さの変化はモジュラスの実数部分を不変にすることから証明できるが、詳細は [15] に譲り、本稿では証明のアイデアを述べるにとどめる (説明に用いる図等の多くは [15] からのものである)。定理 1 の方法だけでは、純虚数のモジュラス、すなわち長方形の基本領域をもつ平坦トーラスできない。しかし、定理 1 の構成を 2 分割し一方のダブルをとることで、モジュラスが純虚数の長方形を基本領域にする平坦トーラスが実現できる (定理 2)。

この研究をサポートしていただいた武蔵野大学数理工学センターに感謝します。増田一男氏には研究の初期に有益なご助言をいただきましたことを感謝いたします。

2 平坦トーラスの埋め込みの構成

この節では、平坦トーラスの折り紙埋め込みを具体的に構成する。Henry Segerman 氏の Hinged Flat Torus ([11], [12], [13]) の変形である。平坦トーラスの折り紙埋め込みの像を具体的に表し、その平坦トーラスのモジュラスを求める。

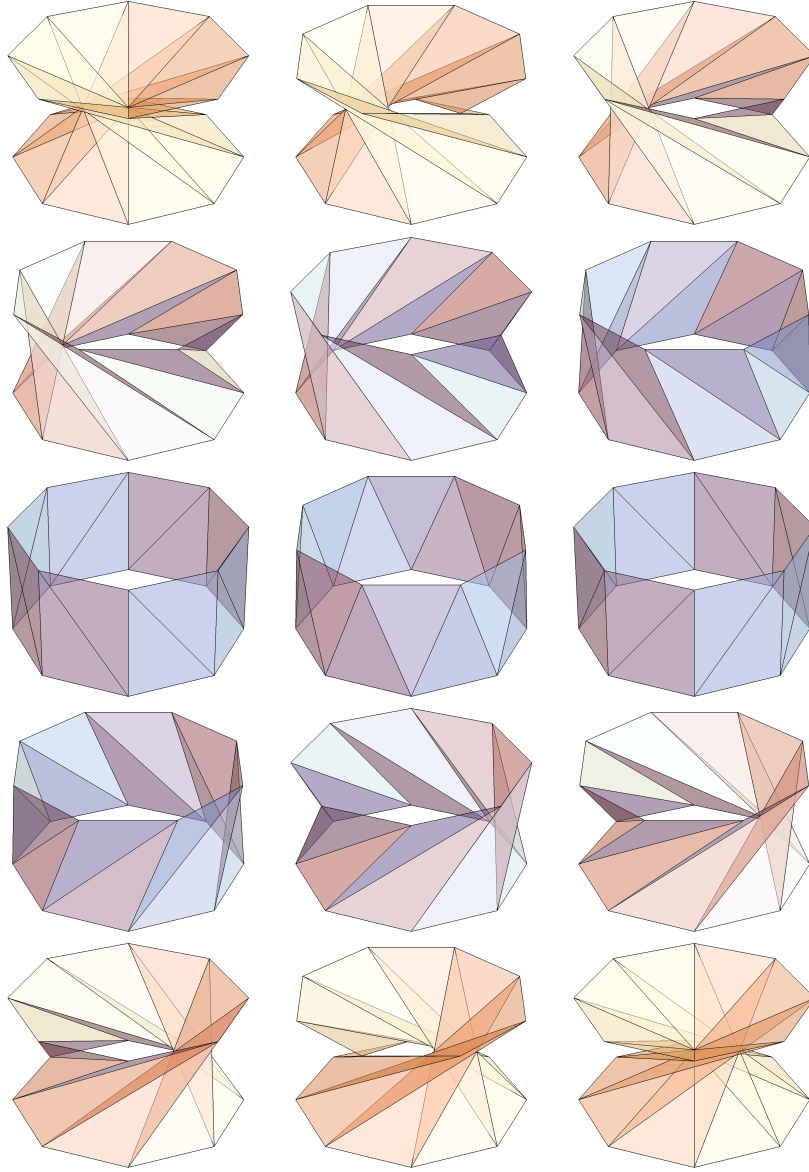


図2 $h = 1, n = 8$ のときの F_u を $\arg u = \frac{2\pi k}{2n}$ ($k = -n, -n+1, \dots, n-2$) に対して、順に各行に図示している。最も上の行の左の図と最も下の行の右の図では、すべての三角形が図形の中心 $(0, 0, \frac{h}{2})$ を含むので、埋め込みになっていない。

2.1 アニュラスの埋め込み像 F_u の構成とその展開図

3次元ユークリッド空間に $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$ として座標を入れる。 n を自然数 ($n \geq 5$) とする。点 $P_k = (e^{2\pi\sqrt{-1}k/n}, 0)$ ($k = 0, \dots, n-1$) を頂点とする正 n 角形 $P_0 \cdots P_{n-1}$ を考える。実数 $h > 0$, 絶対値が1の複素数 $u \in U(1)$ に対し、点 $Q_k^u = (ue^{2\pi\sqrt{-1}k/n}, h)$ ($k = 0, \dots, n-1$) を頂点とする正 n 角形 $Q_0^u \cdots Q_{n-1}^u$ を考える。 $P_n = P_0, Q_n^u = Q_0^u$ とする。図1はこの様子を xy 平面に射影したものである。

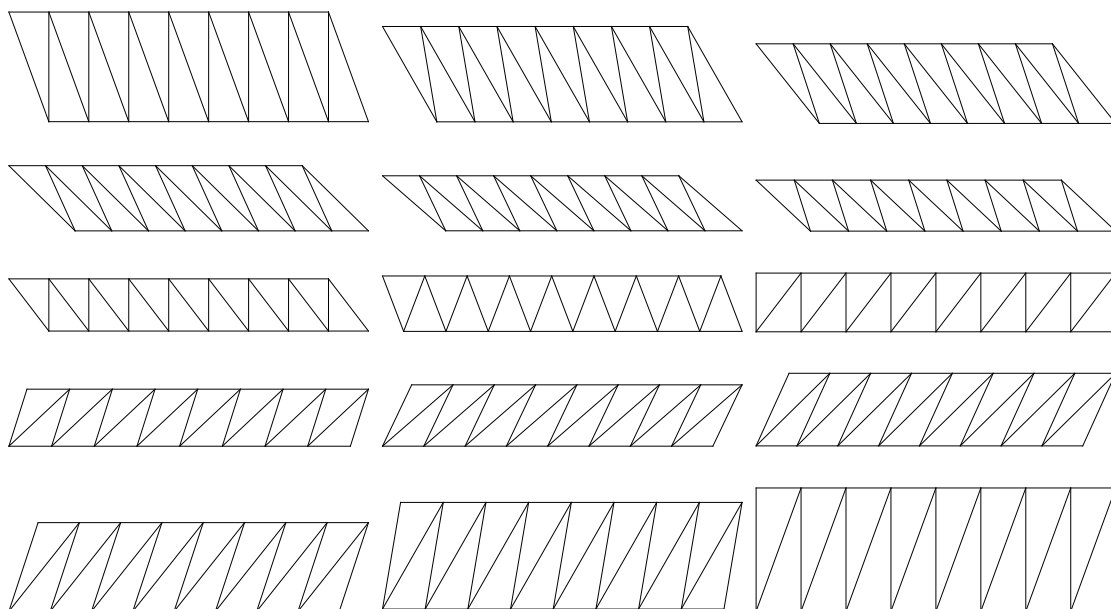


図3 図2の F_u の展開図 ($h = 1, n = 8, \arg u = \frac{2\pi k}{2n}; k = -n, -n+1, \dots, n-2$).
最も上の行の左の図と最も下の行の右の図は埋め込みに対応しない。

三角形 $P_0P_1Q_1^u$ および三角形 $Q_0^uQ_1^uP_1$ を考える。ここで、

$$-\pi < \arg u < \pi - \frac{2\pi}{n}$$

であるとする。

正多角形を回転したものだから、 P_0P_1 の長さ と $Q_0^uQ_1^u$ の長さは等しい。また、3次元空間における線分 $P_0Q_0^u, P_1Q_1^u$ の長さは等しく、三角形 $P_0P_1Q_1^u$ および三角形 $Q_1^uQ_0^uP_0$ は残りの辺 $P_0Q_1^u$ を共有している。従って、 $\triangle P_0P_1Q_1^u \cong \triangle Q_1^uQ_0^uP_0$ のように三角形が合同になる。

これらの三角形を z 軸の周りに $\frac{2k\pi}{n}$ 回転したもの $\triangle P_kP_{k+1}Q_{k+1}^u, \triangle Q_{k+1}^uQ_k^uP_k$ ($k = 0, \dots, n-1$) を合わせたものを F_u とおく。

$$F_u = \bigcup_{k=0, \dots, n-1} \triangle P_kP_{k+1}Q_{k+1}^u \cup \triangle Q_{k+1}^uQ_k^uP_k.$$

これらの三角形が交わることなく面をなしているかどうかをチェックする必要がある。 $\arg u$ の条件から、三角形同士が内点では交わらないことがわかる。三角形が内点で交わらない $\arg u$ の値の下限は、 $-\pi$ 、その上限は $\pi - \frac{2\pi}{n}$ であり、この上限、下限においては、三角形の辺が、正 n 角形 $P_0 \cdots P_{n-1}$ と $Q_0^u \cdots Q_{n-1}^u$ を合わせた図形の中心 $(0, 0, \frac{h}{2})$ を通過する。また、 $\arg u \in [-\frac{2\pi}{n}, 0]$ のときは、 $P_0 \cdots P_{n-1}$ と $Q_0^u \cdots Q_{n-1}^u$ の凸包の側面となり、 $\arg u$ がこの区間の両端においては、正 n 角柱の側面である。図2参照。

さて、構成した面 F_u を展開すると、 $\triangle P_0P_1Q_1^u \cong \triangle Q_1^uQ_0^uP_0$ だから $\triangle P_0P_1Q_1^u \cup \triangle Q_1^uQ_0^uP_0$ は平行四辺形に展開される。これを n 枚合わせて、 $2n \sin \frac{\pi}{n}$ の辺をもち、 P_0P_1 と

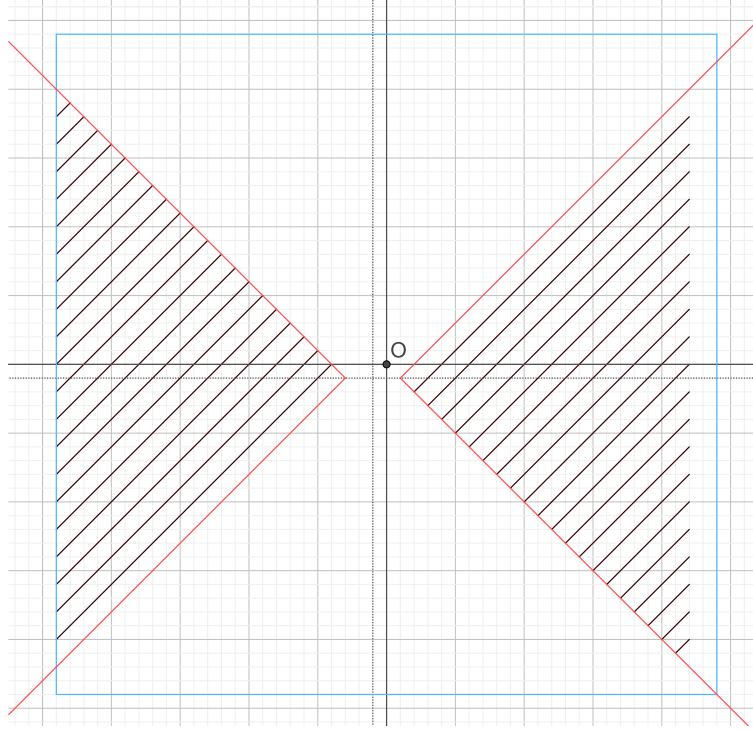


図 4 $\arg v = \arg u + \frac{2\pi k}{n}$ として、 F_u を内側、 F_v を外側として、 F_u, F_v が境界だけを共有する条件は、傾き 1 の黒色の線分の内部にあることである。この図では、 $n = 24$ である。水平方向を $\arg u$, 垂直方向を $\arg v$ とし、青色の正方形が $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ である。

Q_1^u の距離を高さとする平行四辺形が得られる。これが F_u を展開したものである。図 3 参照。図 3 では、 F_u を $P_0Q_0^u$ で切り開き、図 2 の外側を表として描いており、左端の小平行四辺形が $\triangle P_0P_1Q_1^u \cup \triangle Q_1^uQ_0^uP_0$ である。

2.2 平坦トーラスの埋め込み像 $F_u \cup F_v$ とその展開図

2 つの回転 u, v に対し、 F_u, F_v をつくって、それらの境界が一致し、内部が交わらないようにできれば、それらを境界で貼り合わせた図形ができる。それは位相的にトーラスであるが、その展開図は、 F_u の展開図と F_v の展開図である 2 つの平行四辺形を上下で貼り合わせたものになる。どの辺を貼り合わせるかは埋め込みにより指定されているので、平坦トーラスのモジュラスが決定される。

2 実数 u, v を、 $\arg u, \arg v \in (-\pi, \pi - \frac{2\pi}{n})$ のようにとり、整数 m に対し $\arg v = \arg u + \frac{2m\pi}{n}$ とする。 $\{Q_0^v, \dots, Q_{n-1}^v\} = \{Q_0^u, \dots, Q_{n-1}^u\}$ であり、2 つの図形 F_u, F_v の境界は一致する。まず、 F_u をとり、その外側に F_v をとることを考える。

$\arg u \geq -\frac{\pi}{n}$ のとき、 F_u は線分 $P_0Q_0^u$ を z 軸の周りに回転して得られる一葉双曲面の z 軸に近い側に存在し、 $\arg u \leq -\frac{\pi}{n}$ のとき、 F_u は線分 $P_0Q_1^u$ を z 軸の周りに回転して得られ

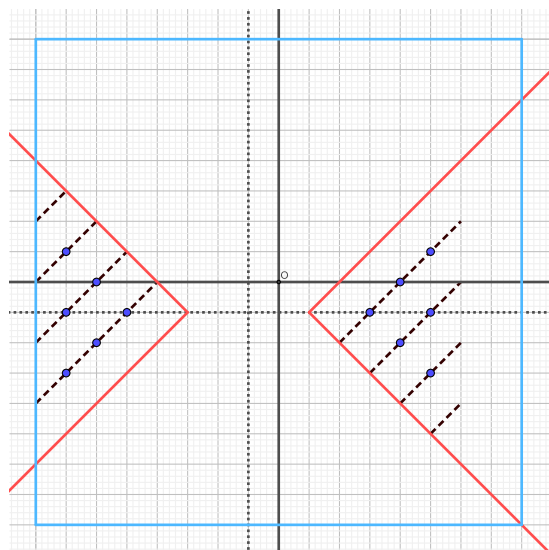


図5 図2の F_u ($n = 8, \arg u = \frac{k\pi}{8}$ ($k = -8, \dots, 6$)) に対しては一つおきに境界が等しくなるが、 $\arg v = \arg u + \frac{2\pi k}{n}$, F_u を内側、 F_v を外側として、 F_u, F_v が境界のみを共有する条件を満たすのは、図の点の12通りである。水平方向を $\arg u$, 垂直方向を $\arg v$ とし、青色の正方形が $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ である。

る一葉双曲面の z 軸に近い側に存在する。この一葉双曲面の外側に F_v の z 軸に近いほうの線分が描かれれば十分である。 F_v については、 $\arg v \geq -\frac{\pi}{n}$ のとき、 $P_0Q_1^v$ が z 軸に近く、 $\arg v \leq -\frac{\pi}{n}$ のとき、 $P_0Q_0^v$ が z 軸に近い。

これらから導かれる条件は、

$$\begin{aligned} & \arg u \geq -\frac{\pi}{n} \text{ かつ } \arg v \geq -\frac{\pi}{n} \text{ のとき、 } |\arg u| > \arg v + \frac{2\pi}{n}; \\ & \arg u \geq -\frac{\pi}{n} \text{ かつ } \arg v \leq -\frac{\pi}{n} \text{ のとき、 } |\arg u| > |\arg v|; \\ & \arg u \leq -\frac{\pi}{n} \text{ かつ } \arg v \geq -\frac{\pi}{n} \text{ のとき、 } |\arg u + \frac{2\pi}{n}| > \arg v + \frac{2\pi}{n}; \\ & \arg u \leq -\frac{\pi}{n} \text{ かつ } \arg v \leq -\frac{\pi}{n} \text{ のとき、 } |\arg u + \frac{2\pi}{n}| > |\arg v| \text{ である。} \end{aligned}$$

これを $\arg v = \arg u + \frac{2\pi k}{n}$ という条件の下で解くと、

$$\begin{aligned} \arg v &= \arg u - \frac{2\pi k}{n} \left(\frac{\pi k}{n} < \arg u < \pi - \frac{2\pi}{n}, k = 2, \dots, n-3 \right), \\ \arg v &= \arg u + \frac{2\pi k}{n} \left(-\pi < \arg u < -\frac{\pi k}{n} - \frac{2\pi}{n}, k = 2, \dots, n-3 \right) \end{aligned}$$

となる。図4参照。

図2の F_u ($n = 8, \arg u = \frac{k\pi}{8}$ ($k = -8, \dots, 6$)) に対しては一つおきに境界が等しくなる。 $v = u + \frac{2\pi k}{n}$, F_u を内側、 F_v を外側として、 F_u, F_v が境界のみを共有する十分条件を満たすのは、図5の点の12通りである。図5では水平方向を $\arg u$, 垂直方向を $\arg v$ とし、青色の正方形が $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ である。

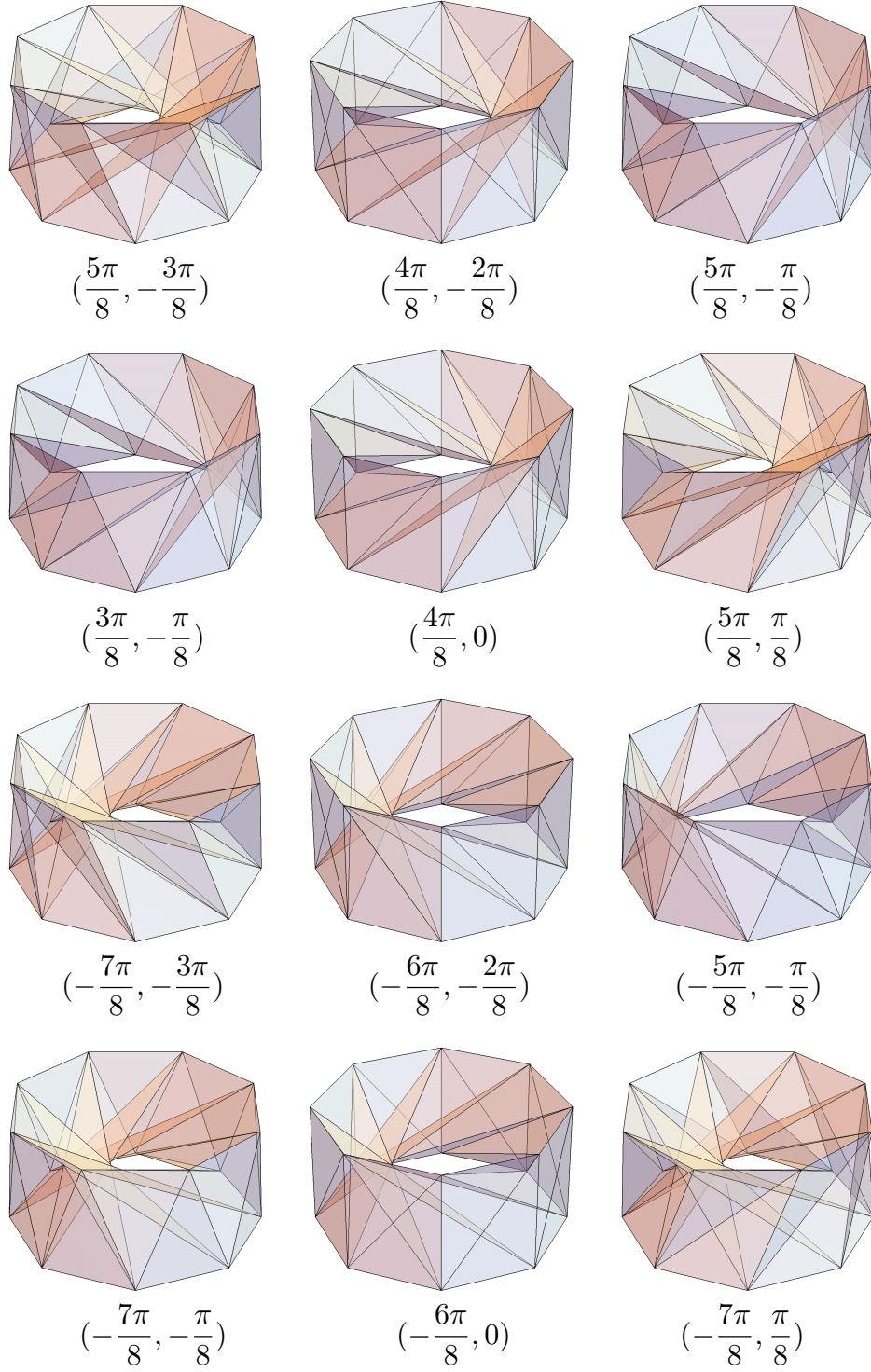


図 6 正 8 角形 ($n = 8$), 高さ 1 ($h = 1$) のとき、 $(\arg u, \arg v)$ に対する $F_u \cup F_v$ という平坦トーラスの埋め込み。

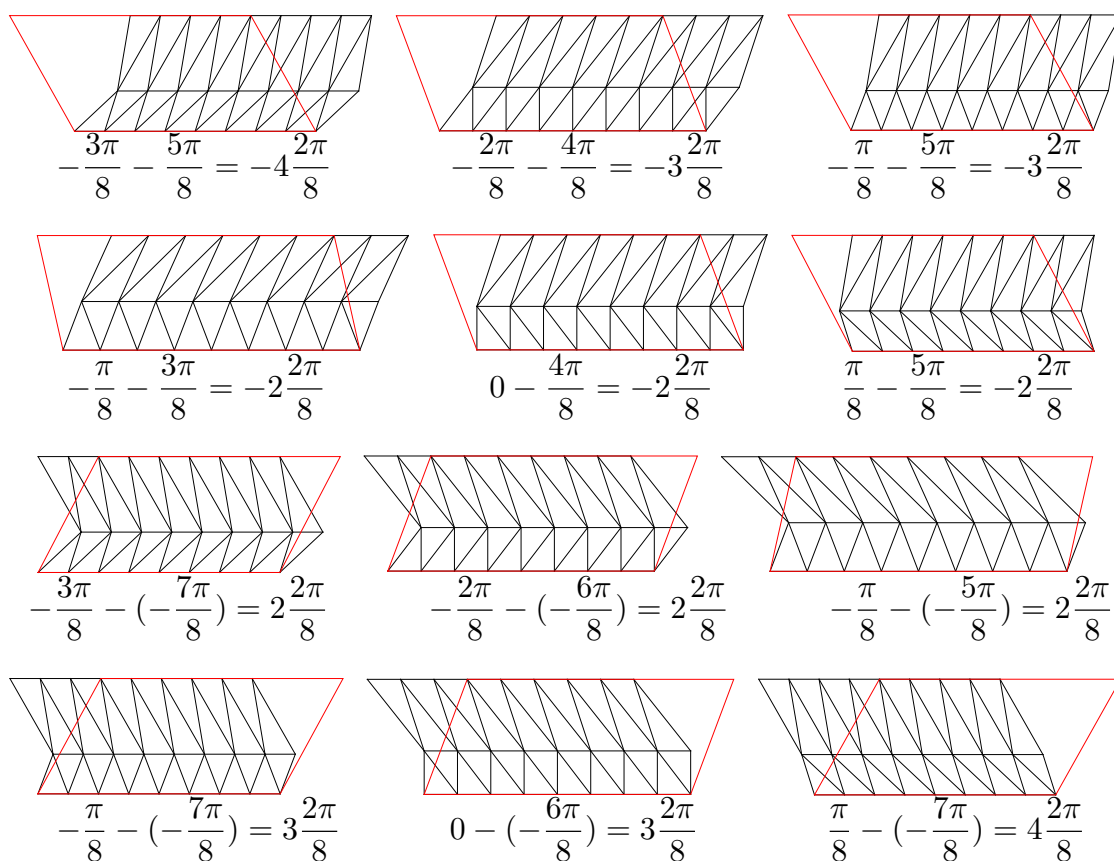
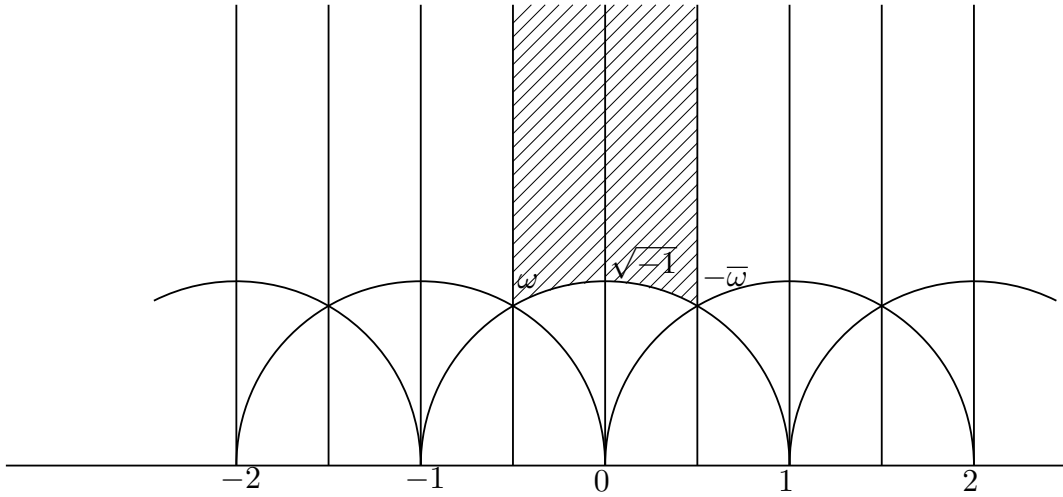


図7 図6の平坦トーラスの展開図。平坦トーラスが囲むソリッドトーラス側が表になるように展開している。外側のアニュラス F_v を展開した部分は図3の展開図を上下に裏返したものになる。 $\arg v - \arg u$ の値を示している。それによる貼り合わせのずれを考えると赤色の平行四辺形が基本領域である。

図5の実現可能な12通りの $(\arg u, \arg v)$ に対応する平坦トーラスの埋め込みは図6のようになる。これらの埋め込みには、カイラリティーがあり、埋め込みの鏡像が同時に描かれている。それらに対する展開図は図7のようになる。 F_u を上側に、 F_v を下側に、平坦トーラスが囲むソリッドトーラスの内側が表になるように展開している。平坦トーラスは、左右の同一視と、上下の同一視により得られるが、 $\arg v = \arg u + \frac{2\pi k}{n}$ のとき上下の同一視は下の $Q_0^v Q_1^v$ に対応する辺が上の $Q_0^u Q_1^u$ に対応する辺の k 個右側の辺と同一視される。このことから基本領域の平行四辺形が決定される。互いに鏡像となる埋め込みの基本領域は互いに鏡像である。

2.3 埋め込まれた平坦トーラスのモジュラス

前節での $F_u \cup F_v$ の形での平坦トーラスの埋め込みの展開図において、 $\arg v - \arg u$ の値が同じ $F_u \cup F_v$ は、 u, v を $\arg v - \arg u$ が一定のままで同時に変形することにより写りあう。これが図5における点線に沿う変形である。これにより、モジュラスが変化することが見て取れるが、実際にはモジュラスの実数部分も変化することがわかる。


 図 8 $PSL(2; \mathbf{Z})$ の作用の基本領域

上の埋め込みと平坦トーラスの展開図では、正八角形の頂点を単位円周上にとり、高さ h は $h = 1$ としている。高さ h を $(0, \infty)$ の範囲で動かすとき、埋め込みは、 xy 平面にほとんど押しつけられている形のものから、いくらでも高い柱の形に変化する。このとき、展開図も連続に変化するが、上の平行四辺形も下の平行四辺形も高さに変化するだけである。すなわち、モジュラスの純虚数部分は変化するが実数部分は不変である。 u を固定するとき、 xy 平面に完全に押しつけられている図形の展開図のモジュラスを下限として、純虚数方向の無限大へ伸びる開半直線をモジュライとする平坦トーラスの折り紙埋め込みが得られていることがわかる。

2.4 主定理

定理を述べるために、平坦トーラスのモジュライ空間を復習する。複素数の上半平面 $\{x + y\sqrt{-1} \mid y > 0\}$ に $PSL(2; \mathbf{Z}) = SL(2; \mathbf{Z})/\{\pm I\}$ を 1 次分数変換により作用させる。このとき、 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は x 軸方向の距離 1 だけの平行移動として作用し、 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ は、 $\sqrt{-1}$ を中心とする π 回転として作用し、 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ は、1 の三乗根 $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}$ を中心とする $-\frac{2\pi}{3}$ 回転として作用する。 $SL(2; \mathbf{Z})$ は、この後の 2 個の行列で生成される。(これにより、 $PSL(2; \mathbf{Z}) \cong (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) * (\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ となることまでわかる。) 上半平面 $H^2 = \{x + y\sqrt{-1} \mid y > 0\}$ に半円 $x^2 + y^2 = 1$ の外側で $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ を満たす閉領域をとると、これが、 $PSL(2; \mathbf{Z})$ の作用の基本領域となる。図 8 参照。 $PSL(2; \mathbf{Z})$ の H^2 への作用は、 $\sqrt{-1}$, ω , ∞ の固定化群が、それぞれ位数 2, 位数 3, 位数 ∞ の巡回群となるものであり、 $H^2/PSL(2; \mathbf{Z})$ は $S^2(2, 3, \infty)$ という 2 次元双曲オービフォールドとなる。

さて、平坦トーラスの折り紙埋め込みの存在は次の定理 1 と定理 2 により示される。

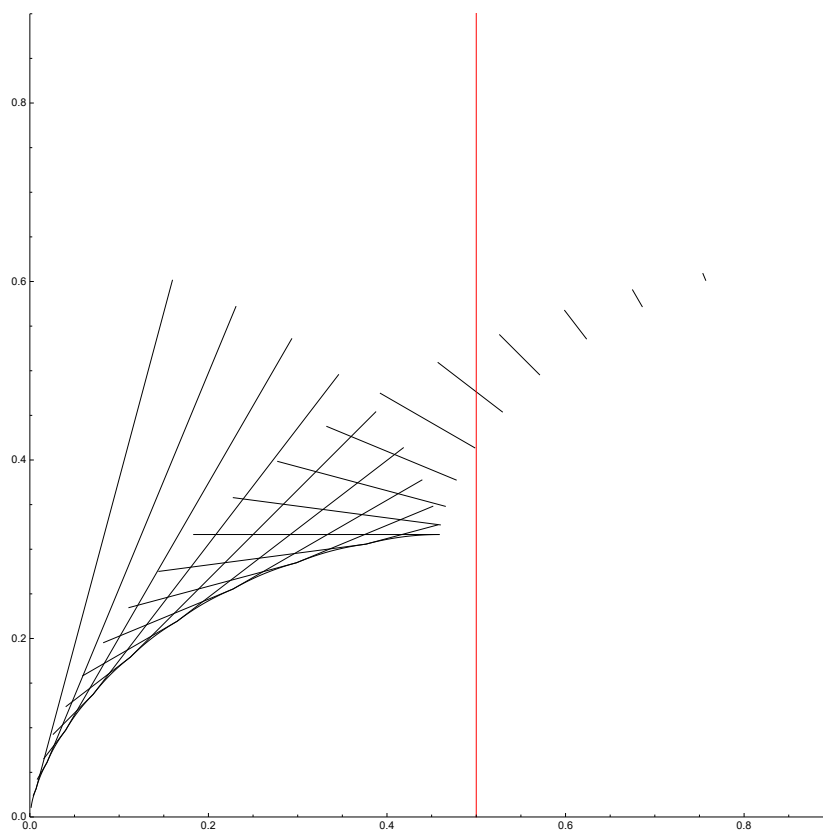


図9 $n = 24, h = 0$ に対する $F_u \cup F_v$ の展開図のモジュラス。

定理 1 $n \geq 5, h > 0, \arg v = \arg u - \frac{2\pi k}{n} \left(\frac{\pi k}{n} < \arg u < \pi - \frac{2\pi}{n}, k = 2, \dots, n-3 \right)$, または $\arg v = \arg u + \frac{2\pi k}{n} \left(-\pi < \arg u < -\frac{\pi k}{n} - \frac{2\pi}{n}, k = 2, \dots, n-3 \right)$ に対する $F_u \cup F_v$ の構成により、純虚数を除く点のモジュラスを持つ平坦トーラスの折り紙埋め込みが得られる。

定理 2 定理 1 における $F_u \cup F_v$ の $0 \leq z \leq \frac{h}{2}$ の部分のダブルをとることにより、純虚数をモジュラスにもつ平坦トーラスの折り紙埋め込みが得られる。

注意 Segerman 氏の本 [12] では、130 ページの冒頭に hinged flat torus としては正方形のトーラスは作られないと記されている。

3 主定理の証明のアイデア

3.1 定理 1 の証明のアイデア

前節で具体的な埋め込みを構成しているので、それに基づいて計算していくのだが、ここでは計算式は提示せず、計算結果のグラフのみ示す。

埋め込み $F_u \cup F_v$ の高さ h を変化させるとモジュラスの虚数部分が変化し、 $h \rightarrow 0$ のと

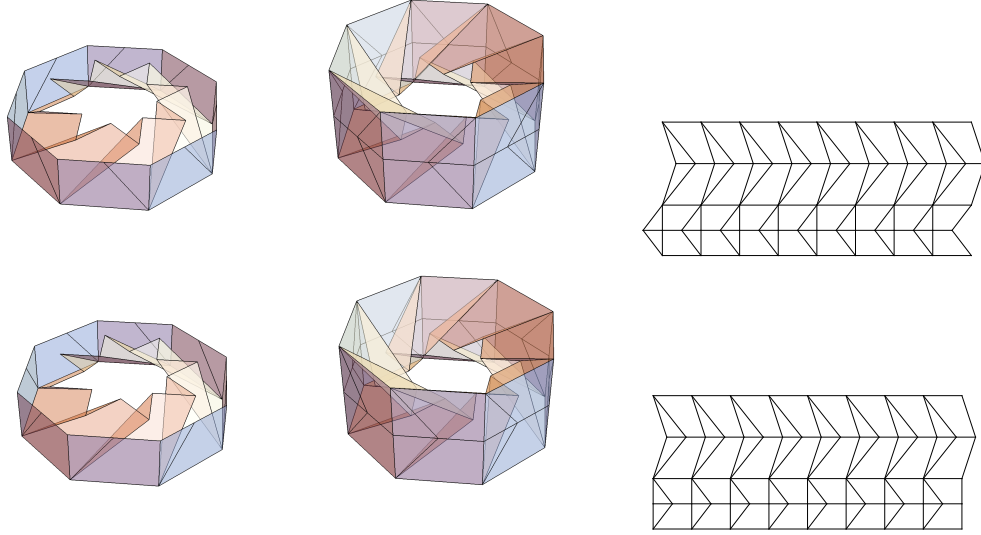


図 10 図 6 の $(\arg u, \arg v) = (\frac{4\pi}{8}, -\frac{2\pi}{8}), (\frac{4\pi}{8}, 0)$ の下側半分、そのダブルとダブルの展開図。

き虚数部分の下限をとり虚数部分の上限は ∞ であることを述べた。そこで、 $h = 0$ に対する $F_u \cup F_v$ の展開図のモジュラスを計算すると $n = 24$ のときに図 9 のようなグラフが得られる。これは図 4 の左半分の 20 本の黒色の実線の線分の像である。このグラフは実は $(0, 0)$ の近傍は含んでいない。

図 4 のグラフの和集合の上方の部分と図 8 を比較すると、図 4 のグラフの和集合は $x \in [\varepsilon, \frac{1}{2}]$ においては $\frac{1}{2}$ 以下の点を含んでいる。従って小さな正実数 ε に対し、実数部分が $[\varepsilon, \frac{1}{2}]$ の部分で、図 8 のモジュライの基本領域を含んでいる。

高さ h が非常に小さいとし、 n を十分大きくとるとき、 F_u, F_v で、 u, v が 1 に近いものをとると、埋め込み $F_u \cup F_v$ で、平坦トーラスのモジュラスは 0 に近いものが得られる。これは、十分大きな n に対し、定理において $k = 2$ の成分 $\arg v = \arg u + \frac{4\pi}{n}$ ($-\pi < \arg u < -\frac{4\pi}{n}$) のモジュラスの値が、 $\arg u$ が $-\frac{4\pi}{n}$ の近くにあるときに、 $(0, 0)$ に近いということである。このことから、 n を大きくすれば、0 に近づく ε に対し、実数部分が $[\varepsilon, \frac{1}{2}]$ の部分で、図 8 のモジュライの基本領域を含んでいることがわかる。

以上により定理 1 が示される。

3.2 定理 2 の証明のアイデア

定理 2 の証明は、 F_u についての次の事実を使う。

命題 3 高さ h , 正 n 角形、 $\arg u \in (-\pi, \pi - \frac{2\pi}{n})$ に対応する F_u を考えるとき、 $a \in (0, h)$ に対し、 $F_u|_{z \in [0, a]}, F_u|_{z \in [a, h]}$ の展開図は F_u の展開図を上下に $h - a : a$ に分割して得られる平行四辺形である。

この命題は、三角形 $P_0P_1Q_1^u$ および三角形 $Q_0^uQ_1^uP_1$ と $z = a$ の交線は、辺 $P_0P_1, Q_0^uQ_1^u$ と平行であることから容易に従う。

この命題から、 $F_u \cup F_v$ の形の平坦トーラスの埋め込みが得られていれば、その $z \in [0, a]$ の部分あるいは $z \in [a, h]$ の部分を取り、平面 $z = a$ についての鏡映との和集合をとれば、長方形を基本領域とする平坦トーラスの埋め込みが得られる。 h, a を変更すれば、モジュラスが、純虚数の任意の値をとることもわかる。特に定理 2 が示される。図 10 参照。

4 最後に

本稿では、任意のモジュラスを持つ平坦トーラスが折り紙埋め込みできることを説明した。

命題 3 は、 $0 \leq a < b \leq h$ に対し、 $F_u|_{z \in [a, b]}$ の展開図も平行四辺形であるという形で若干一般化できる。 $F_u|_{z \in [a, b]}$ を複数用いて、平坦トーラスの様々な埋め込みを定義することができる。しかしながら、現在のところ、正多角形の枠にあたるものを含まない埋め込みは構成できていない。それは次の事情による。

$X = F_u \cap \{z = a\}$ は、 $2n$ 角形の境界であるが、 X が正多角形であるときを除き、 X からそれを切断面を持つ F_u について、 $n, u, \frac{a}{h}$ が定まる（正 $2n$ 角形は正 n 角形で $\arg u = -\frac{\pi}{n}$ (antiprism) のときの切り口と、正 $2n$ 角形で $\arg u = -\frac{\pi}{n}, 0$ (正 $2n$ 角柱 prism) のときの切り口に現れる)。 X が正多角形でなければ、 n は X の頂点の個数の $\frac{1}{2}$ である。 X の周の長さは正多角形の周の長さと同じである。従って正多角形の外接円が求まるが、 X の辺の位置から u が求まる。

このため、正多角形の部分を除いて、 h だけが異なる F_u を用いて平坦アニュラスの埋め込みが作られることになる。1つの u の値だけからは埋め込みは構成できないことがわかるので、 u の値を変更するためには正多角形の部分が必要となる。

証明の詳細は、別途 [15] に出版の予定である。

参考文献

- [1] M. Bern, . Demaine, D. Eppstein, B. Hayes, A disk-packing algorithm for an origami magic trick. In: E. Lodi, L. Pagli, N. Santoro, (eds.) Preliminary version: Fun with Algorithms, pp. 32?42, Carleton Scientific (1999); Also: Hull, T., Peters, A.K. (ed.) Origami3, pp. 17?28 (2002)
- [2] M. Bern and B. Hayes, Origami Embedding of Piecewise-Linear Two-Manifolds, Theoretical Informatics. LATIN 2008. L. N. Computer Science, 4957. Springer, Berlin, Heidelberg.
- [3] V. Borrelli, S. Jabrane, F. Lazarus and B. Thibert, Flat tori in three-dimensional

- space and convex integration, PNAS May 8, (2012) 109 (19) 7218–7223.
- [4] V. Borrelli, S. Jabrane, F. Lazarus and B. Thibert, Isometric embeddings of the square flat torus in ambient space, *Ensaio Matemáticos* 2013, 24, 1–91.
 - [5] Yu. D. Burago and V. A. Zalgaller, Isometric piecewise-linear embeddings of two-dimensional manifolds with a polyhedral metric into \mathbf{R}^3 . *Algebra i Analiz* 7 (1995), no. 3, 76–95; translation in *St. Petersburg Math. J.* 7 (1996), no. 3, 369–385.
 - [6] Y. Eliashberg and N. Mischachev, Introduction to the h -principle, Graduate Studies in Mathematics, 48. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
 - [7] N. H. Kuiper, On C^1 -isometric imbeddings I, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.* 58, (1955), 545–556.
 - [8] Evelyn Lamb, A Few of My Favorite Spaces: The Torus, Math is always better over an orientable genus one pastry, the tastiest of topological examples. *Scientific American*, Roots of Unity, November 28, 2015
 - [9] B. Minemyer, Isometric embeddings of polyhedra into Euclidean space, *J. of Topology and Analysis* 07 (2015), 677–692.
 - [10] J. Nash, C^1 -isometric imbeddings, *Annals of Mathematics* 60 (3), (1954). 383–396.
 - [11] H. Segerman, Hinged flat torus, <https://www.youtube.com/watch?v=M-m-hKtCQVY>
 - [12] H. Segerman, Visualizing Mathematics with 3D Printing, Kindle, 36273 KB, Johns Hopkins University Press (2016/7/26), Amazon Services International, Inc. ASIN: B01IXJLFM6
 - [13] H. Segerman, Hinged flat torus, <https://www.shapeways.com/product/3ZHSG8VZ9/hinged-flat-torus>
 - [14] T. Tachi, <https://tsg.ne.jp/TT/profile.en.html>
 - [15] T. Tsuboi, On origami embeddings of flat tori, in preparation.

(原稿提出: 2019 年 12 月 2 日; 修正稿提出: 2020 年 1 月 29 日)